CONVEXITY AND L. SANTALÓ

ORGANIZADA POR: ANTONIO CAÑETE, DANIEL GALICER, BERNARDO GONZÁLEZ MERINO, DAMIÁN PINASCO

Horario

12/12/2022, 17:30–18:00: David Alonso Gutiérrez, *Desigualdades de Rogers-Shephard discretas.*
12/12/2022, 18:00–18:30: Julián Haddad, *Functional and Asymmetric versions of the Blaschke-Santaló inequality.*
12/12/2022, 18:30–19:00: Francisco Marín Sola, *On generalizations of Grünbaum's inequality.*
13/12/2022, 15:30–16:00: Tomás Fernández Vidal, *Resultados cuantitativos continuos de tipo Helly.*
13/12/2022, 16:00–16:30: Eduardo Lucas, *Conectando el volumen y la cardinalidad.*
13/12/2022, 16:30–17:00: Jesús Yepes Nicolás, *On discrete L_p Brunn-Minkowski type inequalities.*

Resúmenes

David Alonso Gutiérrez. *Desigualdades de Rogers-Shephard discretas*
La desigualdad de Rogers-Shephard afirma que para cualquier cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ el volumen del cuerpo diferencia $K - K$ cumple que

$$|K - K| \leq \binom{2n}{n} |K|.$$

En esta charla recordaremos distintas demostraciones de esta desigualdad y estudiaremos cómo las ideas en estas demostraciones permiten dar distintas versiones de esta desigualdad en el caso discreto, en el que en vez de considerar el volumen se considerará el enumerador de puntos del retículo entero.

Este es un trabajo conjunto con Eduardo Lucas y Jesús Yepes Nicolás.

Tomás Fernández Vidal. *Resultados cuantitativos continuos de tipo Helly*
En 1923, Helly prueba que si en una familia de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ toda intersección de cualesquiera $n+1$ de ellos es no vacía, entonces la intersección de todos es no vacía. Este resultado, que induce la definición de las propiedades de tipo Helly, no da una relación cuantitativa entre las intersecciones mencionadas. Una idea de este vínculo fue probada en 1882 por Bárány, Katchalski y Pach. Este resultado, que puede expresarse en términos de intersección de semiplanos, fue luego mejorado por diversos autores. En particular, Brazitikos dio una versión de este teorema cuando la cantidad de semiplanos considerados es proporcional a la dimensión del espacio. Para llegar a este resultado, utiliza herramientas tan importantes como las descomposiciones aproximadas de la identidad y la desigualdad de Brascamp-Lieb.

Basados en estas técnicas y en algunas mejoras recientes, damos resultados cuantitativos de tipo Helly sensibles a la cantidad de semiplanos considerados.

Julián Haddad. *Functional and Asymmetric versions of the Blaschke-Santaló inequality*
In this talk I will do an overview of the celebrated Blaschke-Santaló inequality and its generalizations in several directions: the functional versions, the L_p case, symmetric and asymmetric, and more.

Eduardo Lucas. *Conectando el volumen y la cardinalidad*
En esta charla exploraremos varias desigualdades nuevas que relacionan el volumen (medida de Lebesgue) de un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ (un conjunto compacto y convexo con interior no vacío) con su *enumerador de puntos del retículo* $\mathrm{G}_n(K) = |K \cap \mathbb{Z}^n|$ (donde $|\cdot|$ es la medida de cardinalidad).

A este fin existen numerosas desigualdades ajustadas, y una estrategia común para refinar cotas ajustadas consiste en introducir funcionales que dependan de los conjuntos considerados. Destacan en este contexto los *mínimos sucesivos* $\lambda_i(K)$ $(i = 1, \ldots, n)$, introducidos por Minkowski para reforzar uno de sus resultados previos, obteniendo así el celebrado *Segundo Teorema de Minkowski.*

Entre otras cosas, mostramos que

$$\mathrm{G}_n(K) \leq \mathrm{vol}(K) \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{n\lambda_i(K)}{2}\right) \text{ y } \mathrm{G}_n\big(\mathrm{int}(K)\big) \geq \mathrm{vol}(K) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{n\lambda_i(K)}{2}\right)$$

(la segunda cuando $\lambda_i(K) \leq 2/n$ para todo $i = 1, \ldots, n$). Estas desigualdades son ligeras relajaciones de las conjeturadas por Betke, Henk y Wills, las cuales probaremos asintóticamente cuando $n = 2$ (y exactamente cuando K sea un polígono reticular). Además, implican la cota superior del Segundo Teorema de Minkowski.

Mostraremos algunas de las herramientas desarrolladas para el trabajo, así como una aplicación a la discretización de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Ésta es una colaboración con Ansgar Freyer.

Francisco Marín Sola. *On generalizations of Grünbaum's inequality*
A classical result by Grünbaum provides a sharp lower bound for the ratio $\mathrm{vol}(K^-)/\mathrm{vol}(K)$ of a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ that depends only on the dimension n (here K^- denotes the intersection of K with a halfspace bounded by a hyperplane passing through its centroid).

In this work we will discuss a generalization of this result to the case of cuts (by hyperplanes) through other particular points. Furthermore, if time allows, we will show some consequences of this result.

This is part of joint work with David Alonso-Gutiérrez, Javier Martín Goñi and Jesús Yepes Nicolás.

Jesús Yepes Nicolás. *On discrete L_p Brunn-Minkowski type inequalities*
The L_p version (for $p \geq 1$) of the Brunn-Minkowski inequality was originally proven by Firey in the 60's in the setting of convex bodies containing the origin, and was recently extended to arbitrary non-empty compact sets by Lutwak, Yang and Zhang. Its statement asserts that

$$\mathrm{vol}\big((1-\lambda)\cdot K +_p \lambda \cdot L\big)^{1/p} \geq (1-\lambda)\mathrm{vol}(K)^{1/p} + \lambda \mathrm{vol}(L)^{1/p},$$

for any non-empty compact sets $K, L \subset \mathbb{R}^n$ and any $\lambda \in (0,1)$, where $\mathrm{vol}(\cdot)$ denotes the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$.

In this talk we will discuss discrete analogues of the above-mentioned result (and its functional counterpart) in the setting of the lattice point enumerator $\mathrm{G}_n(\cdot) = \big|\cdot \cap \mathbb{Z}^n\big|$ of non-empty bounded sets.

This is about joint work with M. A. Hernández Cifre and E. Lucas.
