

Los principios de punto a conjunto: un viaje desde la teoría de la información algorítmica a la teoría de la medida geométrica

Elvira Mayordomo**

Resumen

Resultados recientes como la extensión del teorema de proyección de Marstrand a conjuntos no analíticos, la extensión de la dimensión de la intersección de productos cartesianos para casos no analíticos o la mejora de las cotas conocidas para la dimensión de conjuntos de Furstenberg generalizados han sido realizados desde la teoría de la información algorítmica.

En todos los casos el principal ingrediente de las demostraciones ha sido la dimensión efectiva de Lutz y su *principio de punto a conjunto* [3] que permite cuantificar exactamente las dimensiones fractales de un conjunto a partir de las dimensiones efectivas. El nombre del principio punto a conjunto se debe a que la dimensión efectiva de un conjunto se define a partir de las dimensiones efectivas de los puntos dentro de dicho conjunto, por lo que el principio permite cuantificar exactamente la dimensión de un conjunto a partir de propiedades individuales de sus puntos.

Presentaremos aquí las ideas principales de la dimensión efectiva y del principio de punto a conjunto usando como casos de uso los resultados conocidos. Mencionaremos también la aplicación del principio punto a conjunto en contextos no euclídeos y terminaremos con algunas direcciones de trabajo.

*Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas, Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón, Universidad de Zaragoza, 50018 Zaragoza, SPAIN. elvira@unizar.es. <https://orcid.org/0000-0002-9109-5337>

**Trabajo parcialmente financiado por el proyecto del ministerio de ciencia e innovación PID2019-104358RB-I00 y por el Departamento de Ciencia, Universidad y Sociedad del Conocimiento del Gobierno de Aragón (Grupo de referencia T64_20R, COSMOS). Basado en parte en las conferencias impartidas por la autora durante una estancia en el Institute for Mathematical Sciences de la National University of Singapore en agosto de 2017 y en el American Institute of Mathematics (San José, EE.UU.) en agosto de 2022.

Referencias

- [1] J. Lutz and N. Lutz. Who asked us? how the theory of computing answers questions about analysis. In *Complexity and Approximation: In Memory of Ker-I Ko*. Springer, ding-zhu du and jie wang (eds.) edition, 2020.
- [2] J. H. Lutz. The point-to-set principle, the continuum hypothesis, and the dimensions of hamel bases. *Computability*, 2022. To appear.
- [3] J. H. Lutz and N. Lutz. Algorithmic information, plane Kakeya sets, and conditional dimension. *ACM Transactions on Computation Theory*, 10, 2018. Article 7.
- [4] J. H. Lutz, N. Lutz, and E. Mayordomo. Extending the reach of the point-to-set principle. In P. Berenbrink and B. Monmege, editors, *39th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2022)*, volume 219 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 48:1–48:14. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2022.
- [5] J. H. Lutz and E. Mayordomo. Algorithmic fractal dimensions in geometric measure theory. In V. Brattka and P. Hertling, editors, *Handbook of Computability and Complexity in Analysis*. Springer-Verlag, 2021.
- [6] N. Lutz. Fractal intersections and products via algorithmic dimension. *ACM Transactions on Computation Theory*, 13:1–15, 2021.
- [7] N. Lutz and D. Stull. Projection theorems using effective dimension. In *43rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2018)*, pages 71:1–71:15, 2018.
- [8] N. Lutz and D. M. Stull. Bounding the dimension of points on a line. *Information and Computation*, 275, 2020.
- [9] T. Orponen. Combinatorial proofs of two theorems of Lutz and Stull. Technical Report arXiv:2002.01743, arxiv.org, 2020.
- [10] D. Stull. The dimension spectrum conjecture for planar lines. Technical Report arXiv:2102.00134, arxiv.org, 2021.
- [11] D. Stull. Optimal oracles for point-to-set principles. In P. Berenbrink and B. Monmege, editors, *39th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2022)*, volume 219 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 57:1–57:17. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2022.